

Q.C.M.

Exercice 01 : Cocher la bonne réponse en la justifiant :

N°	Questions	Réponses			
		a	b	c	d
1	Si $\frac{\pi}{6}$ est un argument de z , alors un argument de $\frac{i}{\bar{z}}$ est:	$-\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{6}$	$-\frac{5\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{6}$
2	Si $z = -\sqrt{3} + e^{i\frac{\pi}{6}}$, alors la forme exponentielle de z est:	$e^{\frac{5\pi}{6}i}$	$e^{\frac{7\pi}{6}i}$	$\sqrt{3}e^{-\frac{\pi}{6}i}$	$e^{-\frac{5\pi}{6}i}$
3	Si z et z' sont deux nombres complexes tels que $ z = 2$ et $z' = z - \frac{1}{\bar{z}}$, alors $ z' =$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{2}$
4	Si z est un nombre complexe tel que $ z = \sqrt{2}$, alors $ \bar{z} + iz =$	$2\sqrt{2}$	2	$\sqrt{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$

Exercice 02 : Répondre par Vrai ou Faux en justifiant la réponse :

1.) Soit a un nombre complexe, l'ensemble des points $M(z)$ tels que $(z - a)(\bar{z} - \bar{a}) = 2016$ est :

- (a) Une droite (b) un cercle (c) le vide

2.) Soient z_1 et z_2 les solutions de l'équation : $mz^2 + 2m^2z - 1 = 0$ où m est nombre complexe de module 2

On a alors :

- (a) $|z_1 \cdot z_2| = 2$ (b) $|z_1 + z_2| = 2$ (c) $|z_1 + z_2| = 4$

3.) Le nombre complexe $a = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{24}}$ est une racine sixième de $8e^{i\frac{\pi}{6}}$

- (a) vrai (b) faux

Exercice 03 : Cocher la bonne réponse en la justifiant :

1) Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points A et B d'abscisses respectives 1 et i .

L'ensemble des points M d'abscisse z tel que $\frac{z-i}{z-1}$ est un réel est :

- a. la droite (AB) privée de A b. le segment $[AB]$ privé de A
c. le cercle de diamètre $[AB]$ privé de A

2) Soit z un nombre complexe de module 3 Alors le conjugué de z est :

- a. $\frac{3}{z}$ b. $\frac{\sqrt{3}}{z}$ c. $\frac{9}{z}$

3) Soit z un nombre complexe ; $|z+i|$ est égal à :

- a. $|z|+1$ b. $\sqrt{z^2+1}$ c. $|z-1|$

4) Soit z un nombre complexe non nul d'argument θ . Un argument de $\frac{-1+i\sqrt{3}}{z}$ est :

- a. $-\frac{\pi}{3} + \theta$ b. $\frac{2\pi}{3} + \theta$ c. $\frac{2\pi}{3} - \theta$

5) Soit Ω le point d'abscisse $1-i$. L'ensemble des points M d'abscisse $z = x+iy$ vérifiant $|z-1+i| = |3-4i|$ a pour équation :

- a. $y = -x+1$ b. $(x-1)^2 + y^2 = \sqrt{5}$ c. $z = 1-i+5e^{i\theta}$ avec θ réel

Exercice 04 :

On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) $z^2 - 4iz - 2 + 2i\sqrt{3} = 0$.

1/ a) vérifier que $a = 1 + i(2 - \sqrt{3})$ est une solution de (E).

b) Dédurre l'autre solution b de (E).

2/ a) Montrer que $a^2 = 4(2 - \sqrt{3})e^{i\frac{\pi}{6}}$.

b) Donner alors une mesure de l'argument de a .

3/ Le plan complexe P est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$. Soient A, B et C les points d'affixes respectives a, b et $c = 2i + 2e^{i\frac{\pi}{7}}$. On note $(\mathcal{C})$ le cercle de diamètre $[AB]$.

a) Préciser l'affixe de Ω centre du cercle $(\mathcal{C})$.

b) Montrer que les points O et C appartiennent à $(\mathcal{C})$.

c) Montrer $\frac{c-a}{c-b}$ est imaginaire pure.

4/ Placer Ω , tracer le cercle $(\mathcal{C})$ puis construire les points A et B .

5/ Donner une mesure de l'argument de b .

Exercice 05 :

On donne l'équation $(E_\alpha) : z^2 - (1+i)e^{i\alpha}z + ie^{2i\alpha} = 0$ avec $\alpha \in [0, 2\pi]$

A) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E_α)

B) Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$; on considère les points M_1 et M_2 d'affixes respectives z_1 et z_2 avec $z_1 = e^{i\alpha}$ et $z_2 = ie^{i\alpha}$.

1. Montrer que le triangle OM_1M_2 est rectangle et isocèle.

2. On pose $Z = z_1 + z_2$.

a. Donner le module et un argument de Z .

b. Soit $I = M_1 * M_2$

i. Montrer que lorsque α varie dans $[0, 2\pi]$ le point I décrit un cercle (C) que l'on précisera.

ii. Montrer que (M_1M_2) est tangente à (C) .

3. On suppose que $\alpha \in [0, \pi]$

a. Montrer que $(\vec{u}, \overrightarrow{M_1M_2}) \equiv \alpha + \frac{3\pi}{4} [2\pi]$

b. En déduire la valeur de α pour laquelle la droite (M_1M_2) est parallèle à l'axe $(O, \vec{v})$.

c. Placer les points M_1 et M_2 pour la valeur trouvée de α .

d. Soit A le point d'affixe $1+i$, calculer l'aire du triangle AM_1M_2 .

Exercice 06 :

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on désigne par A et B les points d'affixes respectives $z_A = 1$ et $z_B = -1$.

On considère l'application f qui à tout point M de $P \setminus \{B\}$ d'affixe z associe le point M' d'affixe $z' = \frac{z-1}{z+1}$

1. Déterminer les points invariants de f

2.

a. Vérifier que $(z'-1)(z+1) = -2$ pour tout $z \neq -1$

b. En déduire que : $AM' \times BM = 2$ et que $(\vec{u}, \overrightarrow{AM'}) + (\vec{u}, \overrightarrow{BM}) \equiv \pi [2\pi]$

3. Montrer que si M appartient au cercle de centre B et de rayon 2 alors M' appartient au cercle de centre A et de rayon 1

4. Soit K le point d'affixe $z_K = -2 + i\sqrt{3}$ et K' l'image de K par f

a. Déterminer la forme exponentielle de $z_K + 1$, déduire que $K \in \zeta_{(6,2)}$ puis placer le point K

b. Soit Q le point d'affixe $z_Q = -\overline{z_K}$

Montrer que $\text{Aff}(\overrightarrow{AK'}) = -e^{-\frac{2i\pi}{3}}$ et que $\text{Aff}(\overrightarrow{AQ}) = -2e^{-\frac{2i\pi}{3}}$

c. En utilisant les questions précédentes proposer une construction de K' image de K par f

Exercice 07 :

Pour tout nombre complexe z on pose : $f(z) = z^3 + 2(i - \sqrt{3})z^2 + 4(1 - i\sqrt{3})z + 8i$

1°) a- Montrer que l'équation (E) : $f(z)=0$ admet une racine imaginaire pure z_0 .

b- Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ l'équation (E). on notera z_1 la racine qui a la partie imaginaire négative et z_2 l'autre solution.

2°) Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z telque : $\frac{|f(z)|}{|z^2 - 2\sqrt{3}z + 4|} = 2$

3°) on pose $\omega = \frac{z_1}{z_0}$

a- Donner la forme exponentielle de ω .

b- Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{i}; \vec{j})$. à tout nombre complexe z on lui associe les points $M; M_1$ et M_2 d'affixe respectives : $z; \omega z$ et $\omega^2 z$.
Montrer que OMM_1M_2 est un losange.

Exercice 08 :

Soit $\theta \in]0, \pi[$ et $(E_\theta) : z^2 - 2z - 2i \sin \theta e^{i\theta} = 0$

1. (a) Montrer que $1 + 2i \sin \theta e^{i\theta} = (e^{i\theta})^2$

(b) Résoudre dans $\mathbb{C}$, (E_θ)

2. On donne $f(z) = z^3 - 4z^2 + 2(2 - i \sin \theta e^{i\theta})z + 4i \sin \theta e^{i\theta}$.

(a) Calculer $f(2)$

(b) Montrer que $f(z) = (z - 2)(z^2 + bz + c)$ où b et c deux nombres complexes à déterminer.

(c) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $f(z) = 0$

3. le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. on désigne par A, B , et C les points d'affixes : $2, 1 - e^{i\theta}$ et $1 + e^{i\theta}$

(a) Donner la forme exponentielle de z_B et z_C .

(b) Montrer que O, B, A, C est un rectangle.

(c) Déterminer θ pour que O, B, A, C soit un carré.

Exercice 09 :

Soit $\alpha \in]0, \pi[$.

1)1)Vérifier que $e^{2i\alpha} - 2i \sin \alpha e^{i\alpha} = 1$

2)Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 - 2ie^{i\alpha}z - 2ie^{i\alpha} \sin \alpha = 0$

3)Résoudre alors dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^4 - 2ie^{i\alpha}z^2 - 2ie^{i\alpha} \sin \alpha = 0$.

(On donnera les solutions sous forme exponentielle)

II)Le plan étant rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{U}, \vec{V})$. On considère les points A, B et C d'affixes respectives : $e^{i\alpha}, e^{i\alpha} - 1$ et $e^{i\alpha} + 1$

1)Montrer que A est le milieu du segment $[BC]$.

2)a)Vérifier que $1 + e^{i\alpha} = 2 \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) e^{i\frac{\alpha}{2}}$ et $e^{i\alpha} - 1 = 2i \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) e^{i\frac{\alpha}{2}}$.

b)En déduire que les vecteurs $\vec{OB}$ et $\vec{OC}$ sont orthogonaux.

c)Déterminer α pour que le triangle OBC soit isocèle.

Exercice 10 :

Le plan complexe P est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. Soit A le point d'affixe $-1+i$ et θ un réel de l'intervalle $\left]-\frac{3\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right]$. On considère l'équation $(E): z^2 - 2iz - 1 - ie^{i2\theta} = 0$. On désigne par z_1 et z_2 les solutions de (E) .

1) a) Déterminer la valeur de θ pour que $z_0 = 1+i$ soit une solution de (E) .

b) Résoudre l'équation (E) pour la valeur de θ trouvée.

2) Montrer, sans résoudre (E) , que $\arg(z_1) + \arg(z_2) \equiv \theta + \frac{5\pi}{4} [2\pi]$.

3) a) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) .

b) Ecrire les solutions sous formes exponentielles.

4) On désigne par M_1 et M_2 les points d'affixes respectives $i + e^{i(\theta+\frac{\pi}{4})}$ et $i - e^{i(\theta+\frac{\pi}{4})}$.

a) Montrer que M_1 et M_2 sont symétriques par rapport à un point fixe J que l'on précisera.

b) Déterminer et construire l'ensemble des points M_1 lorsque θ varie dans $\left]-\frac{3\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right]$. En déduire l'ensemble des points M_2 .

5) Soit f l'application du plan $P \setminus \{A\}$ dans le plan P qui à tout point $M(z)$ associe $M'(z')$ tel que $z' = \frac{z^2}{z+1-i}$.

a) Déterminer l'ensemble des points invariants par f .

b) Déterminer l'ensemble des points $M(z)$ tels que $f(M) = M$.

c) Montrer que pour tout point M de $P \setminus \{A\}$ on a : $(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}) \equiv (\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MO}) [2\pi]$. En déduire l'ensemble des points M tels que O, M et M' soient alignés.

Exercice 11 :

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

Pour tout entier naturel n , on note A_n le point d'affixe z_n défini par : $z_0 = 1$ et $z_{n+1} = \left(\frac{3}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}i\right) z_n$.

On définit la suite (r_n) par $r_n = |z_n|$ pour tout entier naturel n .

1) Donner la forme exponentielle du nombre complexe $\frac{3}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}i$.

2) a) Montrer que la suite (r_n) est géométrique de raison $\frac{\sqrt{3}}{2}$. En déduire l'expression de r_n en fonction de n .

b) Que dire de la longueur OA_n , lorsque n tend vers $+\infty$?

3) a) Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, le triangle OA_nA_{n+1} est rectangle en A_{n+1} .

b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $z_n = r_n e^{i\frac{n\pi}{6}}$.

c) Déterminer les valeurs de n pour lesquelles A_n est un point de l'axe des ordonnées.

Exercice 12 :

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on donne le point A d'affixe i . A tout point M du plan, distinct de A et d'affixe z , on associe le point M' d'affixe

$$z' = \frac{i\bar{z} + 1}{z + i}.$$

1. Montrer que, lorsque M décrit l'axe réel, le point M' décrit le cercle trigonométrique $(\mathcal{C})$ de centre O .

2. On pose $z = 1 + i + e^{i\theta}$ avec $\theta \in]-\pi, \pi[$ et on considère le point B d'affixe $1 + i$.

a) Quelle est la courbe (Γ) décrite par le point M , d'affixe z , lorsque θ décrit $]-\pi, \pi[$?

b) Montrer que pour tout θ de $]-\pi, \pi[$, $z' - i = 1 + i \tan \frac{\theta}{2}$.

c) En déduire que $\overrightarrow{BM'} = \tan \frac{\theta}{2} \vec{v}$. A quelle courbe appartient le point M' ?

Exercice 13 :

Le plan complexe est muni d'un R.O.N.D. $(O; \vec{u}; \vec{v})$ soit A et B les points d'affixes ; $z_A = i$ et $z_B = -i$; (C) le cercle de centre O et de rayon 1 et $M'' = S_{(O; \vec{u})}(M)$

Soit f l'application du plan qui à tout point $M(z)$; $z \neq 0$ associe le point $M'(z')$ tel que : $z' = \frac{z^2+1}{z}$

- 1) a- déterminer $f(A)$ et $f(B)$
 b- montrer que : $z \in i\mathbb{R}$ si et seulement si $z' \in i\mathbb{R}$.
 c- en déduire l'image de la droite (AB) par f .
- 2) a- montrer que si $z = e^{i\theta}$; $\theta \in \mathbb{R}$ alors $z' = 2 \cos \theta$.en déduire que si M décrit le cercle (C) alors M' décrit un segment que l'on précisera.
 b- résoudre l'équation : $z' = 2 \cos \theta$ et mettre les solutions sous forme exponentielle
- 3) a- vérifier que pour tout nombre complexe non nul z on a : $z' - z = \frac{1}{z}$.
 b- en déduire que : $MM' = \frac{1}{OM}$ et que les vecteurs ; $\overrightarrow{MM'}$ et $\overrightarrow{OM''}$ sont colinéaires de même sens.
 c- Montrer que si $M \in (C)$ alors : $OMM'M''$ est un losange.
 d- Construire M ; M' et M'' dans le cas où $z = e^{-i\frac{\pi}{2}}$

Exercice 14 :

Soit $\theta \in [-\pi, \pi[$ et soit f_θ l'application du plan dans le plan qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' tel que $z' = i\bar{z} + \sqrt{2}e^{i\theta}$

- 1) Montrer que f_θ est une isométrie du plan
- 2) Soit M et M' d'affixes respectives $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$.
 Montrer que $f(M) = M' \Leftrightarrow \begin{cases} x' = y + \sqrt{2} \cos \theta \\ y' = x + \sqrt{2} \sin \theta \end{cases}$
- 3) Soit $I_\theta = \{M \in P \text{ tel que } f_\theta(M) = M\}$
 a) Montrer que si $(\cos \theta + \sin \theta) \neq 0$ alors $I_\theta = \emptyset$
 b) Montrer que $I_{-\frac{\pi}{4}}$ et $I_{\frac{3\pi}{4}}$ sont deux droites dont on donnera une équation pour chacune d'elles
 c) En déduire la nature et les éléments caractéristiques de chacune des applications $f_{-\frac{\pi}{4}}$ et $f_{\frac{3\pi}{4}}$
- 4) On suppose que $\theta \in [-\pi, \pi[\setminus \left\{-\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right\}$
 a) Vérifier que f_θ n'admet pas de point invariant
 b) Déterminer l'affixe de $f_\theta(O)$ et $f_\theta(I)$ ou $z_0 = 0$ et $z_1 = 1$
 c) En déduire que f_θ est une symétrie glissante

Exercice 15 :

Le plan est rapporté au repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$ (d'unité graphique 2cm).

On considère les points E et F d'affixes respectives $z_E = 1 + i$ et $z_F = \frac{1-i}{2}$.

1. Ecrire z_E et z_F sous forme exponentielle.
2. Montrer que pour tout θ de $[0, \pi[$, le point M d'affixe $z = e^{2i\theta}$ appartient au cercle (Γ) de centre O et de rayon 1.
3. Montrer que pour tout M de (Γ) , $EM \times FM = \left| e^{4i\theta} + 1 - \left(\frac{3}{2} + \frac{1}{2}i\right) e^{2i\theta} \right|$.
4. a) Montrer que pour tout θ de $[0, \pi[$, $e^{4i\theta} + 1 = 2 \cos 2\theta e^{i2\theta}$.
 b) En déduire que $EM \times FM = \sqrt{\frac{1}{4} + \left(2 \cos 2\theta - \frac{3}{2}\right)^2}$.
5. a) Montrer que pour tout réel θ de $[0, \pi[$, $\frac{1}{4} \leq \frac{1}{4} + \left(2 \cos 2\theta - \frac{3}{2}\right)^2 \leq \frac{25}{4}$.
 b) Déterminer l'affixe z_0 du point M_0 correspondant à la valeur maximale de $EM \times FM$.

Placer le point M_0

Exercice 16 :

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$. Soit m un nombre complexe non nul tel que : $|m| = r > 0$ et $\text{Arg}(m) \equiv \frac{\pi}{6} (2\pi)$. On désigne par M et A les points d'affixes respectives m et 1 .

- 1) Donner la forme exponentielle de $\frac{\sqrt{3}+i}{2}$
- 2) Déterminer r pour que $AM = 1$.
- 3) Soit l'équation $(E_m): mz^2 - (1+i)z + \frac{\sqrt{3}+i}{2\bar{m}} = 0$
Désignons par M_1 et M_2 les images respectives de z_1 et z_2 les solutions de (E_m) .
 - a) Sans résoudre (E_m) ; montrer que : $\text{Arg}(z_1 + z_2) \equiv \frac{\pi}{12} (2\pi)$
 - b) Montrer que : $m \left(\frac{\sqrt{3}+i}{2\bar{m}} \right) = i$
 - c) Résoudre, alors dans $\mathbb{C}$ l'équation (E_m) .
 - d) Ecrire les solutions de (E_m) sous forme exponentielle.
- 4) Montrer que OM_1M_2 est un triangle rectangle et isocèle en O .
- 5) Dans la suite de l'exercice M étant un point de cercle Trigonométrique.
 - a) Soit $\theta \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi\}$. Montrer que : $\frac{i-z}{i+z} = e^{i\theta} \Leftrightarrow z = \tan\left(\frac{\theta}{2}\right)$
 - b) Résoudre, alors dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E'_m): m \left(\frac{i-z}{i+z} \right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}+i}{2\bar{m}} \right) \left(\frac{i+z}{i-z} \right)^2 = 1 + i$

Exercice 17 :

I/ On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E): Z^2 - 2e^{i\theta}Z + 1 = 0$ avec $\theta \in]0, \pi[$.

- ① Montrer que l'équation (E) admet deux solutions distinctes Z_1 et Z_2 .

(On ne demande pas de déterminer ces solutions).

- ② Montrer que les solutions de (E) ne sont pas réelles.

II/ Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

On considère les points A, B, M_1 et M_2 d'affixes respectives $1, -1, Z_1$ et Z_2 .

On désigne par K le milieu du segment $[M_1M_2]$ et par $\mathcal{C}$ le cercle trigonométrique de centre O .

- ① Montrer que K appartient au cercle $\mathcal{C}$.

- ② a) Montrer que $(Z_2 - Z_1)^2 = 4(Z_K^2 - 1)$.

- b) En déduire que $(\overline{KA}, \overline{M_1M_2}) \equiv (\overline{M_1M_2}, \overline{KB}) [2\pi]$.

- c) Dans l'annexe (III) on a placé un point K . Tracer la droite (M_1M_2) .

- ③ a) Montrer que $\frac{Z_2+1}{Z_2-1} = -\frac{Z_1+1}{Z_1-1}$.

- b) En déduire que les points A, B, M_1 et M_2 appartiennent à un même cercle.

- c) Construire alors les points M_1 et M_2 .

Section :
MATH

Correction de la Série :
Révision COMPLEXE - Mai 2021

Q.C.M.

Exercice N° 01:

- ① $\arg(z) \equiv \frac{\pi}{6} [2\pi]$
 $\Rightarrow \arg\left(\frac{i}{z^2}\right) \equiv \arg(i) - 2\arg(z) [2\pi]$
 $\equiv \frac{\pi}{2} + 2\arg(z) [2\pi]$
 $\equiv \frac{\pi}{2} + 2\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{5\pi}{6} [2\pi]$
 $\Rightarrow \boxed{d}$
- ② $z = -\sqrt{3} + e^{i\frac{\pi}{6}} = -\sqrt{3} + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)$
 $= -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i = e^{i\frac{5\pi}{6}} \Rightarrow \boxed{a}$
- ③ $|z| = 2 \Rightarrow |z'| = \left|z - \frac{1}{z}\right|$
 $\Leftrightarrow |z'| = \left|\frac{z\bar{z} - 1}{\bar{z}}\right| = \left|\frac{|z|^2 - 1}{\bar{z}}\right|$
 $= \frac{|2 - 1|}{|\bar{z}|} = \frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{b}$
- ④ $|z| = \sqrt{2} \Rightarrow |\bar{z} + i\bar{z}| = |\bar{z}(1+i)|$
 $= |\bar{z}| \cdot |1+i| = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 2 \Rightarrow \boxed{b}$

Exercice N° 02:

- ① $(z-a)(\bar{z}-\bar{a}) = 2016 \Leftrightarrow$
 $(z-a)(z-\bar{a}) = |z-a|^2 = 2016$
 Soit A : le point d'affixe a
 $\Rightarrow |z-a|^2 = AM^2 = 2016 \Leftrightarrow$
 $AM = \sqrt{2016} \Rightarrow M \in \mathcal{C}(A, \sqrt{2016})$
 $\Rightarrow \boxed{b}$

- ② z_1 et z_2 : solutions de l'équation:
 $mz^2 + 2m^2z - 1 = 0 \quad / |m| = 2$
 $\bullet z_1 \cdot z_2 = \frac{c}{a} = \frac{-1}{m} \Rightarrow |z_1 z_2| = \frac{1}{|m|} = \frac{1}{2} \neq 2$
 $\bullet z_1 + z_2 = \frac{-b}{a} = \frac{-2m^2}{m} = -2m$
 $\Rightarrow |z_1 + z_2| = |-2m| = 2|m| = 4 \Rightarrow \boxed{c}$
- ③ $a = \sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{2n}} \Rightarrow$
 $a^6 = \left[\sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{2n}}\right]^6 = (\sqrt{2})^6 \cdot e^{i\frac{6\pi}{2n}} = 8e^{i\frac{\pi}{n}}$
 $\Rightarrow \boxed{\text{Faux}}$

Exercice N° 03:

- 1) A(1) B(i)
 $\frac{z-i}{z-1} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \frac{z\bar{M}-z\bar{B}}{z\bar{M}-z\bar{A}} \in \mathbb{R}$
 $\Leftrightarrow \overrightarrow{BM}$ colla' $\overrightarrow{AM} \Leftrightarrow A, B, M$: alignés
 $\Rightarrow M$ décrit $(AB) \setminus \{A\} \Rightarrow \boxed{a}$
- 2) $z \in \mathbb{C} \quad / \quad |z| = 3$
 $\Rightarrow |z|^2 = 9 \Leftrightarrow z\bar{z} = 9$
 $\Rightarrow \bar{z} = \frac{9}{z} \Rightarrow \boxed{c}$
- 3) $|z+i| = |i| \cdot |z+i| = |iz-1|$
 $\Rightarrow \boxed{c}$
- 4) $\arg(z) = \theta \Rightarrow \arg\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{z}\right)$
 $\arg\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{z}\right) = \arg(-1+i\sqrt{3}) + \arg(z) = \frac{2\pi}{3} + \theta \Rightarrow \boxed{b}$
- 5) $SL(1-i) \Rightarrow |z-1+i| = |z-4i| \Leftrightarrow$
 $|z\bar{M}-z\bar{A}| = 5 \Leftrightarrow SM = 5$
 $\Rightarrow z = 1-i + 5e^{i\theta} / \theta \in \mathbb{R} \Rightarrow \boxed{c}$

Exercice N° 04 :

$$(E): z^2 - 4iz - 2 + 2i\sqrt{3} = 0$$

$$\begin{aligned} 1) a) [1+i(2-\sqrt{3})]^2 - 4i[1+i(2-\sqrt{3})] - 2 + 2i\sqrt{3} &= \\ = 1 - (2-\sqrt{3})^2 + 2i(2-\sqrt{3}) - 4i + 4(2-\sqrt{3}) - 2 + 2i\sqrt{3} &= \\ = 1 - 7 + 4\sqrt{3} + 4i - 2i\sqrt{3} - 4i + 8 - 4\sqrt{3} - 2 + 2i\sqrt{3} &= \\ = 0 \Rightarrow \boxed{a = 1+i(2-\sqrt{3})} : \text{solution de (E)} \end{aligned}$$

$$b) a+b = +4i \Leftrightarrow b = 4i - a$$

$$\Rightarrow b = 4i - 1 - 2i + i\sqrt{3} = -1 + i(2+\sqrt{3})$$

$$\text{Donc : } \boxed{b = -1 + i(2+\sqrt{3})}$$

$$\begin{aligned} 2) a) a^2 &= [1+i(2-\sqrt{3})]^2 = 1 - (2-\sqrt{3})^2 + 2i(2-\sqrt{3}) \\ &= 1 - 7 + 4\sqrt{3} + 4i - 2i\sqrt{3} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow a^2 = (-6 + 4\sqrt{3}) + 2i(2-\sqrt{3}) \quad (1)$$

$$\text{or } 4(2-\sqrt{3})e^{i\frac{\pi}{6}} = 4(2-\sqrt{3})\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)$$

$$= (2-\sqrt{3})(2\sqrt{3} + 2i)$$

$$= 4\sqrt{3} + 4i - 6 - 2i\sqrt{3}$$

$$= (-6 + 4\sqrt{3}) + 2i(2-\sqrt{3}) \quad (2)$$

$$(1) \text{ et } (2) \Rightarrow \boxed{a^2 = 4(2-\sqrt{3})e^{i\frac{\pi}{6}}}$$

$$b) \text{ soit } \theta : \arg(a)$$

$$\Rightarrow \arg(a^2) = \arg(4(2-\sqrt{3})e^{i\frac{\pi}{6}}) = 2\theta \pmod{2\pi}$$

$$\Rightarrow \frac{\pi}{6} \equiv 2\theta \pmod{2\pi} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{12} + k\pi$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \theta = \frac{\pi}{12} \\ \text{ou} \\ \theta = -\frac{11\pi}{12} \end{cases}$$

$$\text{or } \operatorname{Re}(a) > 0 \text{ et } \operatorname{Im}(a) > 0$$

$$\Rightarrow \arg(a) \in]0, \frac{\pi}{2}[\quad \text{Donc : } \boxed{\arg(a) = \frac{\pi}{12}}$$

$$3) A(a) \quad B(b) \quad (C = 2i + 2e^{i\frac{\pi}{4}})$$

$\mathcal{C}$ = cercle de diamètre (AB)

$$a) \Omega : \text{centre de } \mathcal{C}_{(AB)} \Rightarrow$$

$$\Omega = \frac{a+b}{2} = 2i$$

$$b) \text{ on pose } r : \text{le rayon de } \mathcal{C}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow r &= \frac{AB}{2} = \frac{|b-a|}{2} = \frac{|-1+i(2+\sqrt{3}) - 1-i(2-\sqrt{3})|}{2} \\ &= \frac{|-2+2i\sqrt{3}|}{2} = \frac{|-1+i\sqrt{3}|}{1} = \sqrt{1+3} = 2 \end{aligned}$$

$$\bullet \Omega O = |\Omega - 0| = |0 - 2i| = 2 = r$$

$$\Rightarrow O \in \mathcal{C}_{(\Omega, 2)}$$

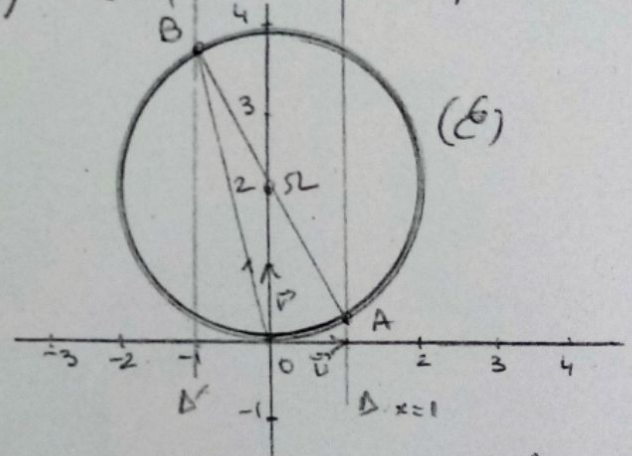
$$\bullet \Omega C = |\Omega - c| = |2i + 2e^{i\frac{\pi}{4}} - 2i| = 2$$

$$\Rightarrow C \in \mathcal{C}_{(\Omega, 2)}$$

$$c) C \in \mathcal{C}_{(AB)} \Leftrightarrow \overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{BC}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\arg(\overrightarrow{AC})}{\arg(\overrightarrow{BC})} \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow \boxed{\frac{c-a}{c-b} \in i\mathbb{R}}$$

$$4) \Omega(2i) = \Omega(0, 2)$$



$$\bullet x_A = 1 \Rightarrow A \in \mathcal{C} \cap D : x=1 \text{ et } y_A < 1$$

$$\bullet x_B = -1 \Rightarrow B \in \mathcal{C} \cap D' : x=-1 \text{ et } y_B = 2+\sqrt{3} > 3$$

$$\text{ou } \boxed{B = S_{\Omega}(A)}$$

$$5) \arg(\overrightarrow{OB}) = (\vec{u}, \vec{OB}) \pmod{2\pi}$$

$$= (\vec{u}, \vec{OA}) + (\vec{OA}, \vec{OB}) \pmod{2\pi}$$

$$\text{or } (\vec{u}, \vec{OA}) = \arg(\overrightarrow{OA}) = \frac{\pi}{12}$$

$$\text{et } O \in \mathcal{C}_{(AB)} \Rightarrow (\vec{OA}, \vec{OB}) = \frac{\pi}{2} \pmod{2\pi}$$

$$\Rightarrow \arg(\overrightarrow{OB}) = \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{2} = \frac{7\pi}{12} \pmod{2\pi}$$

$$\text{Donc : } \boxed{\arg(b) = \frac{7\pi}{12} \pmod{2\pi}}$$

Exercice N° 05:

$$(E\alpha) \quad z^2 - (1+i)e^{i\alpha}z + ie^{i2\alpha} = 0$$

$$\textcircled{A} \quad \Delta = ((1+i)e^{i\alpha})^2 - 4ie^{i2\alpha} \\ = 2ie^{i\alpha} - 4ie^{i2\alpha} = -2ie^{i2\alpha}$$

$$\Delta = [(1-i)e^{i\alpha}]^2$$

$$z' = \frac{(1+i)e^{i\alpha} - (1-i)e^{i\alpha}}{2} = ie^{i\alpha}$$

$$z'' = \frac{(1+i)e^{i\alpha} + (1-i)e^{i\alpha}}{2} = e^{i\alpha}$$

$$SC = \{e^{i\alpha}, ie^{i\alpha}\}$$

$$\textcircled{B} \quad M_1(z_1 = e^{i\alpha}) \quad M_2(z_2 = ie^{i\alpha})$$

$$1) \frac{\arg(\overrightarrow{OM_2})}{\arg(\overrightarrow{OM_1})} = \frac{ie^{i\alpha}}{e^{i\alpha}} = i \in i\mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{OM_1} \perp \overrightarrow{OM_2} \quad \textcircled{1}$$

$$\text{et } \frac{OM_2}{OM_1} = \left| \frac{z_2}{z_1} \right| = |i| = 1 \quad \textcircled{2}$$

Concl.: le triangle OM_1M_2 est un triangle rectangle et isocèle

$$2) \quad Z = z_1 + z_2$$

$$a) \quad Z = e^{i\alpha} + ie^{i\alpha} = e^{i\alpha}(1+i) \\ \Rightarrow Z = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}e^{i\alpha} = \sqrt{2}e^{i(\alpha+\frac{\pi}{4})}$$

$$\text{alors } |Z| = \sqrt{2} \text{ et } \arg(Z) = \alpha + \frac{\pi}{4}$$

$$b) \quad I = M_1 * M_2 \Rightarrow z_I = \frac{z_1 + z_2}{2}$$

$$\Rightarrow z_I = \frac{Z}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{i(\alpha+\frac{\pi}{4})}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} OI = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow I \in \mathcal{C}(0, \frac{\sqrt{2}}{2}) \\ (\vec{u}, \vec{OI}) = \alpha + \frac{\pi}{4} [2\pi] \end{cases}$$

Comme $\alpha \in [0, 2\pi] \Rightarrow I$ décrit tout le cercle $\mathcal{C}(0, \frac{\sqrt{2}}{2})$

* $M_0(M_1, M_2)$: tangente à $\mathcal{C}$ en I

$$\frac{\arg(\overrightarrow{M_1M_2})}{\arg(\overrightarrow{OI})} = \frac{z_2 - z_1}{z_I - z_0} = \frac{(i-1)e^{i\alpha}}{\frac{\sqrt{2}}{2}e^{i(\alpha+\frac{\pi}{4})}} \\ = \frac{2\sqrt{2}e^{i(\alpha+\frac{3\pi}{4})}}{\sqrt{2}e^{i(\alpha+\frac{\pi}{4})}} = 2e^{i\frac{\pi}{2}} = 2i \in i\mathbb{R}$$

$$\Rightarrow (M_1, M_2) \perp (OI) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Rightarrow (M_1, M_2) \text{ est } \\ I \in \mathcal{C}(0, \frac{\sqrt{2}}{2}) \end{array} \right\} \text{ tangente à } \mathcal{C}$$

$$3) \alpha \in [0, \pi]$$

$$a) \quad (\vec{u}, \overrightarrow{M_1M_2}) = \arg(z_2 - z_1) [2\pi] \\ = \arg((i-1)e^{i\alpha}) = \arg(\sqrt{2}e^{i(\alpha+\frac{3\pi}{4})}) \\ = \alpha + \frac{3\pi}{4} [2\pi]$$

$$b) \quad (M_1, M_2) \parallel (OI) \Leftrightarrow (\vec{v}, \overrightarrow{M_1M_2}) = k\pi$$

$$\Leftrightarrow (\vec{v}, \vec{u}) + (\vec{u}, \overrightarrow{M_1M_2}) = k\pi$$

$$\Leftrightarrow -\frac{\pi}{2} + \alpha + \frac{3\pi}{4} = k\pi$$

$$\Leftrightarrow \alpha = -\frac{\pi}{4} + k\pi$$

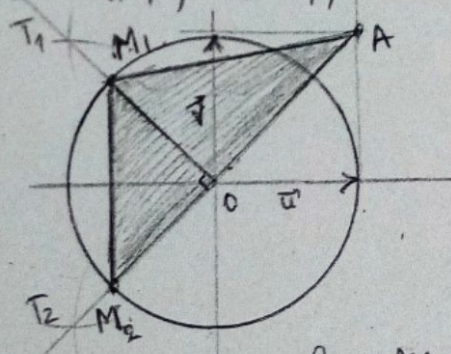
$$\alpha \in [0, \pi] \Rightarrow k=1 \text{ et } \boxed{\alpha = \frac{3\pi}{4}}$$

$$c) \quad M_1(z_1 = e^{i\frac{3\pi}{4}}) \Rightarrow$$

$$M_1 = \mathcal{C}(0, 1) \cap (OT_1) / (\vec{u}, \overrightarrow{OT_1}) = \frac{3\pi}{4} [2\pi]$$

$$* M_2(z_2 = ie^{i\alpha}) = e^{i(\frac{\pi}{2} + \frac{3\pi}{4})} = e^{i\frac{5\pi}{4}}$$

$$\Rightarrow M_2 = \mathcal{C}(0, 1) \cap (OT_2) / (\vec{u}, \overrightarrow{OT_2}) = \frac{5\pi}{4} [2\pi]$$



d) $A(1+i)$, le triangle AM_1M_2 admet $[OM_1]$ comme hauteur. Car OM_1M_2 rectangle en O et O, A, M_2 alignés.

$$\Rightarrow A M_1 M_2 = \frac{AM_2 \times OM_1}{2}$$

$$\text{or } AM_2 = AO + OM_2 = \sqrt{2} + 1 \quad \left. \begin{array}{l} OM_1 = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{A = \frac{1+\sqrt{2}}{2}} \quad (ua)$$

Exercice N° 06:

$$A(1) \quad B(-1)$$

$$f: P \setminus \{B\} \longrightarrow P$$

$$M(z) \longmapsto M'(z') / z' = \frac{z-1}{z+1}$$

$$1) I(z) \text{ invariant par } f \Leftrightarrow \{I\} = I$$

$$\Leftrightarrow z' = z \Leftrightarrow \frac{z-1}{z+1} = z$$

$$\Leftrightarrow z-1 = z(z+1) = z^2 + z$$

$$\Leftrightarrow z^2 = -1 \Leftrightarrow \begin{cases} z_1 = i \\ z_2 = -i \end{cases}$$

$$\text{Ainsi } \{I_1(i), I_2(-i)\} : \text{invariant par } f$$

$$2) a) (z'-1)(z+1) = \left(\frac{z-1}{z+1} - 1\right)(z+1) \\ = \left(\frac{z-1-z-1}{z+1}\right)(z+1) = -2$$

$$b) (z'-1)(z+1) = -2 \Leftrightarrow \begin{cases} |z'-1| \cdot |z+1| = |-2| \\ \arg(z'-1) + \arg(z+1) = \arg(-2) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} |z_M - z_A| \cdot |z_M - z_B| = 2 \\ \arg(z_M - z_A) + \arg(z_M - z_B) = \pi \quad (2\pi) \end{cases}$$

$$\begin{cases} AM' \cdot BM = 2 \\ (\vec{u}, \vec{AM'}) + (\vec{u}, \vec{BM}) = \pi \quad (2\pi) \end{cases}$$

$$3) \text{ si } M \in \mathcal{C}(B, 2) \Leftrightarrow BM = 2$$

$$\sim AM' \cdot BM = 2 \Leftrightarrow AM' = 1$$

$$\Rightarrow M' \in \mathcal{C}(A, 1)$$

$$4) k(z_k = -2 + i\sqrt{3}) \text{ et } f(k) = k'$$

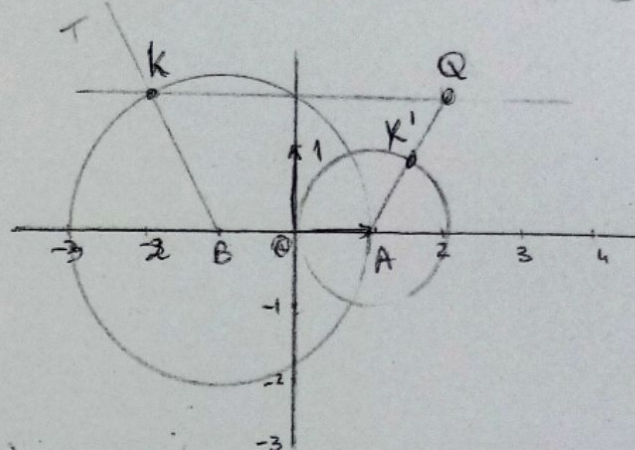
$$a) z_{k+1} = -1 + i\sqrt{3} = 2\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2e^{i\frac{2\pi}{3}}$$

$$BK = |z_k - z_B| = |z_{k+1}| = |2e^{i\frac{2\pi}{3}}| = 2 \cdot \text{arg}$$

$$\Rightarrow K \in \mathcal{C}(B, 2)$$

$$z_k - z_B = 2e^{i\frac{2\pi}{3}} \Rightarrow \begin{cases} BK = 2 \\ (\vec{u}, \vec{BK}) = \frac{2\pi}{3} \quad (2\pi) \end{cases}$$

$$\Rightarrow K = \mathcal{C}(B, 2) \cap [BT] / (\vec{u}, \vec{BT}) = \frac{2\pi}{3} \quad (2\pi)$$



$$b) z_Q = -\bar{z}_K$$

$$\text{aff}(\vec{AK'}) = z_{K'} - z_A = \frac{z_k - 1}{z_k + 1} - 1 \\ = \frac{z_k - 1 - z_k - 1}{z_k + 1} = \frac{-2}{z_k + 1} = \frac{-2}{\text{aff}(\vec{BK})} = \frac{-2}{2e^{i\frac{2\pi}{3}}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\text{aff}(\vec{AK'}) = -e^{-i\frac{2\pi}{3}}}$$

$$\begin{aligned} \text{aff}(\vec{AQ}) &= z_Q - 1 = -\bar{z}_K - 1 \\ &= -(\bar{z}_K + 1) = -\overline{\text{aff}(\vec{BK})} \\ &= -\overline{2e^{i\frac{2\pi}{3}}} = -2e^{-i\frac{2\pi}{3}} \end{aligned}$$

$$c) z_Q = -\bar{z}_K \Rightarrow Q = S_{(O, \pi)}(K)$$

$$\text{aff}(\vec{AQ}) = 2 \text{aff}(\vec{AK'}) \Rightarrow \vec{AQ} = 2\vec{AK'}$$

$$\Rightarrow \vec{AK'} = \frac{1}{2} \vec{AQ} \Rightarrow \boxed{K' = A * Q}$$

Exercice N° 07:

$$f(z) = z^3 + 2(i - \sqrt{3})z^2 + 4(1 - i\sqrt{3})z + 8i$$

$$1) a) z_0 = i\alpha : \text{ solutions imaginaires pures de } (E)$$

$$\Leftrightarrow f(i\alpha) = 0$$

$$\Leftrightarrow (i\alpha)^3 + 2(i - \sqrt{3})(i\alpha)^2 + 4(1 - i\sqrt{3})(i\alpha) + 8i = 0$$

$$\Leftrightarrow -i\alpha^3 - 2i\alpha^2 + 2\sqrt{3}\alpha^2 + 4i\alpha + 4\sqrt{3}\alpha + 8i = 0$$

$$\Leftrightarrow (2\sqrt{3}\alpha^2 + 4\sqrt{3}\alpha) + i(-\alpha^3 - 2\alpha^2 + 4\alpha + 8) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2\sqrt{3}\alpha^2 + 4\sqrt{3}\alpha = 0 & (1) \\ -\alpha^3 - 2\alpha^2 + 4\alpha + 8 = 0 & (2) \end{cases}$$

$$(1): 2\sqrt{3}\alpha(\alpha+2)=0 \Rightarrow \begin{cases} \alpha=0 \\ \alpha=-2 \end{cases}$$

$$\text{Si } \alpha=-2 \Rightarrow (2): +8-8+8+8=0 \text{ vérifié}$$

Concl: $\boxed{z_0 = -2i}$ est la solution imaginaire de (E)

$$b)(E): (z+2i)[az^2 + bz + c] = 0$$

$$\Rightarrow az^3 + (b+2ia)z^2 + (c+2ib)z + 2ic = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ b+2ia=2i-2\sqrt{3} \Rightarrow \boxed{b=-2\sqrt{3}} \\ c+2ib=4-4i\sqrt{3} \quad 4+2i(-2\sqrt{3})=4-4i\sqrt{3} \\ 2ic=8i \Rightarrow \boxed{c=4} \end{cases} \text{ vérifié}$$

$$\Rightarrow (E): (z+2i)[z^2 - 2\sqrt{3}z + 4] = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} z+2i=0 \Rightarrow \boxed{z_0=-2i} \\ \text{ou} \\ z^2 - 2\sqrt{3}z + 4 = 0 \end{cases}$$

$$\Delta' = 3 - 4 = -1 = (i)^2 \quad \begin{cases} z_1 = \sqrt{3} - i \\ z_2 = \sqrt{3} + i \end{cases}$$

$$SC = \{-2i, \sqrt{3}-i, \sqrt{3}+i\}$$

$$2) \frac{|f(z)|}{|z^2 - 2\sqrt{3}z + 4|} = 2 \Rightarrow |z+2i| = 2$$

$$\text{on pose } A(-2i) \Rightarrow |z - z_A| = 2$$

$$\Rightarrow AM = 2 \Rightarrow \boxed{M \in \mathcal{C}(A, 2)}$$

$$3) a) w = \frac{z_1}{z_0} = \frac{\sqrt{3}-i}{-2i} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = e^{i\frac{\pi}{3}}$$

$$b) M(z) \quad M_1(wz) \quad M_2(w^2z)$$

$$\bullet \text{ aff}(\overrightarrow{OM}) = z$$

$$\begin{aligned} \text{aff}(\overrightarrow{M_2M_1}) &= z_1 - z_2 = wz - w^2z = z(w - w^2) \\ &= z(e^{i\frac{\pi}{3}} - e^{i\frac{2\pi}{3}}) = z\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} - \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right) \\ &= z = \text{aff}(\overrightarrow{OM}) \Rightarrow OMM_1M_2 \# \end{aligned}$$

$$\bullet MM_1 = |z_1 - z| = |wz - z| = |z||w-1|$$

$$= |z| \cdot \left|\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} - 1\right| = \left|-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right| \cdot |z|$$

$$= |z| = OM$$

$$\text{ma alors } \begin{cases} OMM_1M_2 \# \\ OM = MM_1 \end{cases}$$

d'où OMM_1M_2 est un losange

Exercice N° 08:

$$\theta \in]0, \pi[; (E\theta): z^2 - 2z - 2i \sin \theta \cdot e^{i\theta} = 0$$

$$1) a) 1 + 2i \sin \theta \cdot e^{i\theta} = 1 + 2i \sin \theta \cdot (\cos \theta + i \sin \theta)$$

$$= 1 + 2i \sin \theta \cos \theta - 2 \sin^2 \theta$$

$$= (1 - 2 \sin^2 \theta) + i(2 \sin \theta \cos \theta)$$

$$= \cos(2\theta) + i \sin(2\theta) = e^{i2\theta} = (e^{i\theta})^2$$

$$\text{Concl: } 1 + 2i \sin \theta \cdot e^{i\theta} = (e^{i\theta})^2$$

$$b) \Delta' = 1 + 2i \sin \theta \cdot e^{i\theta} = (e^{i\theta})^2$$

$$\begin{cases} z' = 1 - e^{i\theta} \\ z'' = 1 + e^{i\theta} \end{cases} \quad SC = \{z', z''\}$$

$$2) f(z) = z^3 - 4z^2 + 2(2 - i \sin \theta \cdot e^{i\theta})z + 4i \sin \theta \cdot e^{i\theta}$$

$$a) f(2) = 8 - 16 + 4(2 - i \sin \theta \cdot e^{i\theta}) + 4i \sin \theta \cdot e^{i\theta}$$

$$= 8 - 16 + 8 - 4i \sin \theta \cdot e^{i\theta} + 4i \sin \theta \cdot e^{i\theta}$$

$$= 0 \Rightarrow \boxed{z_0 = 2} \text{ solution de } f(z) = 0$$

$$b) f(z) = (z-2)(az^2 + bz + c)$$

$$= az^3 + (b-2a)z^2 + (c-2b)z - 2c$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ b-2a=-4 \Rightarrow \boxed{b=-2} \\ c-2b=4-2i \sin \theta \cdot e^{i\theta} \text{ vérifié} \\ -2c=4i \sin \theta \cdot e^{i\theta} \Rightarrow \boxed{c=-2i \sin \theta \cdot e^{i\theta}} \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(z) = (z-2)[z^2 - 2z - 2i \sin \theta \cdot e^{i\theta}] = 0$$

$$c) f(z) = 0 \Rightarrow \begin{cases} z-2=0 \Rightarrow \boxed{z_0=2} \\ z^2 - 2z - 2i \sin \theta \cdot e^{i\theta} = 0 \end{cases}$$

$$z' = 1 - e^{i\theta}, \quad z'' = 1 + e^{i\theta}$$

$$SC = \{2, 1 - e^{i\theta}, 1 + e^{i\theta}\}$$

$$3) A(2) \quad B(1 - e^{i\theta}) \quad C(1 + e^{i\theta})$$

$$a) z_B = 1 - e^{i\theta} = -2i \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{i\frac{\theta}{2}}$$

$$\Rightarrow z_B = 2 \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{i\left(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{2}\right)}$$

$$\alpha \theta \in]0, \pi[\Rightarrow \frac{\theta}{2} \in]0, \frac{\pi}{2}[\Rightarrow \sin\frac{\theta}{2} > 0$$

$$\text{donc } z_B = 2 \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \cdot e^{i\left(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{2}\right)}$$

$$\bullet z_C = 1 + e^{i\theta} = 2 \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{i\frac{\theta}{2}}$$

$$\frac{\theta}{2} \in]0, \frac{\pi}{2}[\Rightarrow \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) > 0$$

$$\text{donc } z_C = 2 \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{i\frac{\theta}{2}}$$

$$\begin{aligned} b) \text{ aff}(\vec{CA}) &= z_A - z_C = 2 - 1 - e^{i\theta} = 1 - e^{i\theta} \\ &= z_B - z_O = \text{aff}(\vec{OB}) \end{aligned}$$

$$\text{donc } \vec{OB} = \vec{CA} \Rightarrow OBAC \# \text{ ①}$$

$$\bullet OA = |z_A - z_O| = |2| = 2$$

$$\bullet BC = |z_C - z_B| = |1 + e^{i\theta} - 1 - e^{i\theta}| = |2e^{i\theta}| = 2$$

$$\Rightarrow OA = BC \text{ ②}$$

① et ② $\Rightarrow OBAC$ est un # ayant
2 diagonales isométriques $\Rightarrow$
 $OBAC$ est un rectangle

$$c) OBAC \text{ rectangle} \Rightarrow OB = OC$$

$$\text{or } OB = |z_B - z_O| = 2 \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

$$OC = |z_C - z_O| = 2 \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{OB}{OC} = \frac{2 \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}{2 \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)} = \tan\left(\frac{\theta}{2}\right) = 1$$

$$\Rightarrow \frac{\theta}{2} = \frac{\pi}{4} + k\pi \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

$$\text{or } \theta \in]0, \pi[\Rightarrow \boxed{\theta = \frac{\pi}{2}}$$

Exercice N° 09: $\alpha \in]0, \pi[$

$$\begin{aligned} 1) a) e^{i2\alpha} - 2i \sin \alpha \cdot e^{i\alpha} &= e^{i2\alpha} - 2i \sin \alpha (\cos \alpha + i \sin \alpha) \\ &= e^{i2\alpha} - i(2 \sin \alpha \cos \alpha) + 2 \sin^2 \alpha \\ &= \cos(2\alpha) + i \sin(2\alpha) - i \sin(2\alpha) + 2 \sin^2 \alpha \\ &= 1 - 2 \sin^2 \alpha + 2 \sin^2 \alpha = 1 \end{aligned}$$

$$\text{Cml} = \boxed{e^{i2\alpha} - 2i \sin \alpha e^{i\alpha} = 1}$$

$$2) (E): z^2 - 2ie^{i\alpha} z - 2ie^{i\alpha} \sin \alpha = 0$$

$$\begin{aligned} \Delta' &= (ie^{i\alpha})^2 + 2i \sin \alpha e^{i\alpha} \\ &= -[e^{i2\alpha} - 2i \sin \alpha e^{i\alpha}] = -1 = (i)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet z' &= ie^{i\alpha} - i = i(e^{i\alpha} - 1) \\ &= i(2i \sin(\frac{\alpha}{2}) e^{i\frac{\alpha}{2}}) = -2 \sin(\frac{\alpha}{2}) e^{i\frac{\alpha}{2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet z'' &= ie^{i\alpha} + i = i(1 + e^{i\alpha}) \\ &= i(2 \cos(\frac{\alpha}{2}) e^{i\frac{\alpha}{2}}) = 2 \cos(\frac{\alpha}{2}) e^{i\frac{\alpha}{2}} \end{aligned}$$

$$S_C = \{z', z''\}$$

$$3) (E'): z^4 - 2ie^{i\alpha} z^2 - 2ie^{i\alpha} \sin \alpha = 0$$

$$\text{on pose } z^2 = z \Rightarrow (E'): z^2 - 2ie^{i\alpha} z - 2ie^{i\alpha} \sin \alpha = 0$$

$$\bullet z' = -2 \sin(\frac{\alpha}{2}) e^{i(\frac{\alpha}{2})} = 2 \sin(\frac{\alpha}{2}) e^{i(\frac{\alpha}{2} + \pi)}$$

$$\Rightarrow z^2 = 2 \sin(\frac{\alpha}{2}) e^{i(\frac{\alpha}{2} + \pi)} = \sqrt{2 \sin(\frac{\alpha}{2})} e^{i(\frac{\alpha}{4} + \frac{\pi}{2})}$$

$$\begin{aligned} z_1 &= \sqrt{2 \sin(\frac{\alpha}{2})} e^{i(\frac{\alpha}{4} + \frac{\pi}{2})} \\ z_2 &= -\sqrt{2 \sin(\frac{\alpha}{2})} e^{i(\frac{\alpha}{4} + \frac{\pi}{2})} = \sqrt{2 \sin(\frac{\alpha}{2})} e^{i(\frac{\alpha}{4} - \frac{\pi}{2})} \end{aligned}$$

$$\bullet z'' = 2 \cos(\frac{\alpha}{2}) e^{i\frac{\alpha}{2}} = \sqrt{2 \cos(\frac{\alpha}{2})} e^{i\frac{\alpha}{4}}$$

$$\begin{aligned} z_3 &= \sqrt{2 \cos(\frac{\alpha}{2})} e^{i\frac{\alpha}{4}} \\ z_4 &= -\sqrt{2 \cos(\frac{\alpha}{2})} e^{i\frac{\alpha}{4}} = \sqrt{2 \cos(\frac{\alpha}{2})} e^{i(\frac{\alpha}{4} - \pi)} \end{aligned}$$

$$S_C = \{z_1, z_2, z_3, z_4\}$$

$$\text{II) } A(e^{i\alpha}) \quad B(e^{i\alpha} - 1) \quad C(e^{i\alpha} + 1)$$

$$\begin{aligned} 1) z_{B \times C} &= \frac{z_B + z_C}{2} = \frac{e^{i\alpha} - 1 + e^{i\alpha} + 1}{2} \\ &= e^{i\alpha} = z_A \Rightarrow \boxed{A = B \times C} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2) a) 1 + e^{i\alpha} &= e^{i\frac{\alpha}{2}} [e^{-i\frac{\alpha}{2}} + e^{i\frac{\alpha}{2}}] \\ &= e^{i\frac{\alpha}{2}} \cdot 2 \cos(\frac{\alpha}{2}) \end{aligned}$$

$$e^{i\alpha} - 1 = e^{i\frac{\alpha}{2}} (e^{i\frac{\alpha}{2}} - e^{-i\frac{\alpha}{2}}) = 2i \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) e^{i\frac{\alpha}{2}}$$

$$b) \frac{\text{aff}(\vec{OB})}{\text{aff}(\vec{OA})} = \frac{e^{i\alpha} - 1}{e^{i\alpha} + 1} = \frac{2i \sin(\frac{\alpha}{2}) e^{i\frac{\alpha}{2}}}{2 \cos(\frac{\alpha}{2}) e^{i\frac{\alpha}{2}}}$$

$$= i \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) \in i\mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{OB} \perp \vec{OA}}$$

$$c) OBC \text{ isocèle} \Rightarrow \frac{OB}{OC} = 1$$

$$\Rightarrow \left| \frac{z_B - z_O}{z_C - z_O} \right| = |i \tan \frac{\alpha}{2}| = 1$$

$$\Rightarrow \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) = 1 = \tan\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{\alpha}{2} = \frac{\pi}{4} + k\pi \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

$$\text{or } \alpha \in]0, \pi[\Rightarrow \boxed{\alpha = \frac{\pi}{2}}$$

Exercice N° 10:

$$\theta \in]-\frac{3\pi}{4}, \frac{\pi}{4}[$$

$$A(-1+i)$$

$$(E): z^2 - 2iz - 1 - ie^{i2\theta} = 0$$

$$1) a) (1+i) \text{ solution} \Rightarrow (1+i)^2 - 2i(1+i) - 1 - ie^{i2\theta} = 0$$

$$\Rightarrow \cancel{2i} - \cancel{2i} + 2 - 1 - ie^{i2\theta} = 0 \Rightarrow$$

$$ie^{i2\theta} = 1 \Rightarrow e^{i(2\theta + \frac{\pi}{2})} = 1$$

$$\Rightarrow 2\theta + \frac{\pi}{2} = 2k\pi \Rightarrow 2\theta = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

$$\Rightarrow \theta = -\frac{\pi}{4} + k\pi \quad \text{or } \theta \in]-\frac{3\pi}{4}, \frac{\pi}{4}[$$

$$\Rightarrow \sin \theta = \frac{\pi}{4} \Rightarrow z_0 = 1+i \text{ solution de (E)}$$

$$b) \text{ si } \theta = -\frac{\pi}{4} \Rightarrow z_0 = 1+i \text{ solution}$$

$$\text{or } z_0' + z_0 = -\frac{b}{a} = 2i$$

$$\Rightarrow z_0' = 2i - z_0 = 2i - 1 - i = -1 + i$$

$$\text{Concl: si } \theta = -\frac{\pi}{4} \Rightarrow S_A = \{1+i, -1+i\}$$

$$2) P = z_1 \times z_2 = \frac{c}{a} = \frac{-1 - ie^{i2\theta}}{1}$$

$$\Rightarrow z_1 \times z_2 = -1 + e^{i(2\theta + \frac{\pi}{2})}$$

$$= 2i \sin\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) e^{i\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right)}$$

$$\Rightarrow z_1 \times z_2 = 2 \sin\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) e^{i\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right)}$$

$$\text{or } \theta \in]-\frac{3\pi}{4}, \frac{\pi}{4}[\Rightarrow \left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) \in]-\frac{\pi}{2}, 0[$$

$$\Rightarrow \sin\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) < 0$$

$$\Rightarrow z_1 \times z_2 = -2 \sin\left(\frac{\pi}{4} - \theta\right) e^{i\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right)}$$

$$\Rightarrow z_1 \times z_2 = 2 \sin\left(\frac{\pi}{4} - \theta\right) e^{i\left(\theta + \frac{5\pi}{4}\right)}$$

$$\text{d'où } \arg(z_1 \times z_2) = \theta + \frac{5\pi}{4} [2\pi]$$

$$\Rightarrow \boxed{\arg(z_1) + \arg(z_2) = \theta + \frac{5\pi}{4} [2\pi]}$$

$$3) a) \Delta' = (i)^2 + 1 + ie^{i2\theta} = (e^{i(\theta + \frac{\pi}{4})})^2$$

$$\left. \begin{aligned} z_1 &= i + e^{i(\theta + \frac{\pi}{4})} \\ z_2 &= i - e^{i(\theta + \frac{\pi}{4})} \end{aligned} \right\} \Rightarrow S = \{z_1, z_2\}$$

$$b) z_1 = i + e^{i(\theta + \frac{\pi}{4})} = e^{i\frac{\pi}{2}} + e^{i(\theta + \frac{\pi}{4})}$$

$$= e^{i(\frac{\theta}{2} + \frac{3\pi}{8})} \left[e^{i(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{8})} + e^{i(\frac{\pi}{8} - \frac{\theta}{2})} \right]$$

$$z_1 = 2 \cos\left(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{8}\right) e^{i(\frac{\theta}{2} + \frac{3\pi}{8})}$$

$$\text{or } -\frac{3\pi}{4} < \theta < \frac{\pi}{4} \Rightarrow -\frac{3\pi}{8} < \frac{\theta}{2} < \frac{\pi}{8}$$

$$\Rightarrow -\frac{\pi}{2} < \frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{8} < 0 \Rightarrow \cos\left(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{8}\right) > 0$$

$$\text{alors } \boxed{z_1 = 2 \cos\left(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{8}\right) e^{i(\frac{\theta}{2} + \frac{3\pi}{8})}}$$

$$z_2 = i - e^{i(\theta + \frac{\pi}{4})} = e^{i\frac{\pi}{2}} - e^{i(\theta + \frac{\pi}{4})}$$

$$= e^{i(\frac{\theta}{2} + \frac{3\pi}{8})} \left[e^{i(\frac{\pi}{8} - \frac{\theta}{2})} - e^{i(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{8})} \right]$$

$$= 2i \sin\left(\frac{\pi}{8} - \frac{\theta}{2}\right) e^{i(\frac{\theta}{2} + \frac{3\pi}{8})}$$

$$= 2 \sin\left(\frac{\pi}{8} - \frac{\theta}{2}\right) e^{i(\frac{\theta}{2} + \frac{7\pi}{8})}$$

$$\text{or } \theta \in]-\frac{3\pi}{4}, \frac{\pi}{4}[\Rightarrow \left(\frac{\pi}{8} - \frac{\theta}{2}\right) \in]0, \frac{\pi}{2}[$$

$$\Rightarrow \sin\left(\frac{\pi}{8} - \frac{\theta}{2}\right)$$

$$\text{Concl: } \boxed{z_2 = 2 \sin\left(\frac{\pi}{8} - \frac{\theta}{2}\right) e^{i(\frac{\theta}{2} + \frac{7\pi}{8})}}$$

$$4) M_1 (i + e^{i(\theta + \frac{\pi}{4})}) \text{ et } M_2 (i - e^{i(\theta + \frac{\pi}{4})})$$

$$a) z_{M_1 \times M_2} = \frac{z_{M_1} + z_{M_2}}{2} = \frac{2i}{2} = i = z_O$$

$$\text{d'où } \boxed{M_1 \times M_2 = J}$$

b) Ensemble des points M_1 :

$$z_{M_1} = i + e^{i(\theta + \frac{\pi}{4})} \Leftrightarrow z_{M_1} - z_O = e^{i(\theta + \frac{\pi}{4})}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} |z_{M_1} - z_O| = 1 \\ \arg(z_{M_1} - z_O) = \theta + \frac{\pi}{4} \pmod{2\pi} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} JM_1 = 1 \\ (\vec{u}, \vec{JM_1}) = \theta + \frac{\pi}{4} \pmod{2\pi} \end{cases}$$

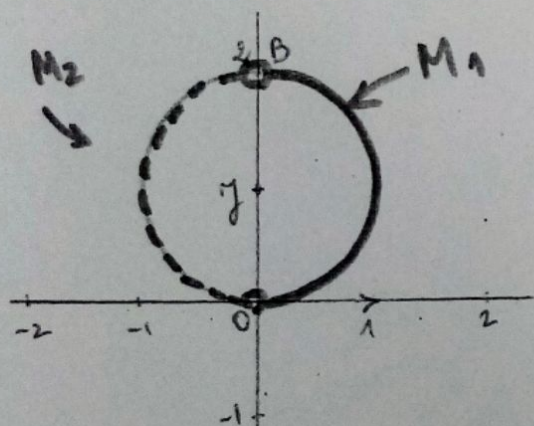
$$\bullet JM_1 = 1 \Rightarrow M_1 \in C_{(J, 1)}$$

$$\bullet -\frac{3\pi}{4} < \theta < \frac{\pi}{4} \Rightarrow -\frac{\pi}{2} < \theta + \frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow -\frac{\pi}{2} < (\vec{u}, \vec{JM_1}) < \frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow M_1 \text{ décrit l'arc } (\widehat{OB}) \setminus \{O, B\}$$

$$\text{avec } z_B = 2i$$



$$\bullet \text{ Comme } M_2 = S_J(M_1)$$

$$\Rightarrow M_2 \text{ décrit l'arc } (\widehat{BO}) \setminus \{O, B\}$$

$$5) f: M(z) \mapsto M'(z') / z' = \frac{z^2}{z+1-i}$$

$$a) I(z) \text{ invariant} \Leftrightarrow f(I) = I$$

$$\Leftrightarrow z' = z \Leftrightarrow \frac{z^2}{z+1-i} = z$$

$$\Leftrightarrow z^2 = z^2 + z(1-i) = 0 \Leftrightarrow z = 0$$

$$\Rightarrow O : \text{l'unique pt inv par } f$$

b) has programme

$$c) (\vec{OM}, \vec{OM'}) = \arg\left(\frac{z'}{z}\right) = \arg\left(\frac{\frac{z^2}{z+1-i}}{z}\right)$$

$$= \arg\left(\frac{z}{z+1-i}\right) = \arg\left(\frac{z - z_0}{z_M - z_A}\right) [2\pi]$$

$$= (\vec{AM}, \vec{OM}) [2\pi] \equiv (\vec{MA}, \vec{MO}) [2\pi]$$

$$\text{Concl. } (\vec{OM}, \vec{OM'}) \equiv (\vec{MA}, \vec{MO}) [2\pi]$$

$$\bullet O, M, M' : \text{alignés} \Leftrightarrow \vec{OM} \text{ col à } \vec{OM'}$$

$$\Leftrightarrow (\vec{OM}, \vec{OM'}) = k\pi \Rightarrow (\vec{MA}, \vec{MO}) = k\pi$$

$$\Leftrightarrow \vec{MA} \text{ col à } \vec{MO} \Leftrightarrow O, A, M : \text{alignés}$$

$$\text{Concl. } \boxed{M \text{ décrit } (OA) \setminus \{A\}}$$

Exercice N° 11 :

$$A_n(z_n) \quad / \quad \begin{cases} z_0 = 1 \\ z_{n+1} = \left(\frac{3}{4} + i\frac{\sqrt{3}}{4}\right) \cdot z_n \end{cases}$$

$$r_n = |z_n| \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$1) \frac{3}{4} + i\frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} e^{i\frac{\pi}{6}}$$

$$2) a) M_q r_n \text{ SG} \Leftrightarrow \forall q, r_{n+1} = q r_n$$

$$\text{or } r_{n+1} = |z_{n+1}| = \left|\left(\frac{3}{4} + i\frac{\sqrt{3}}{4}\right) z_n\right|$$

$$= \left|\frac{\sqrt{3}}{2} e^{i\frac{\pi}{6}}\right| \cdot |z_n| = \frac{\sqrt{3}}{2} r_n$$

$$\Rightarrow r_n : \text{suite géométrique de raison } q = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{d'où } r_n = r_0 \cdot q^n \text{ or } r_0 = |z_0| = 1$$

$$\Rightarrow \boxed{r_n = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n}$$

$$b) OA_n = |z_n| = r_n = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} OA_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n = 0$$

$$3) a) \text{ aff } \left(\frac{A_{n+1} - A_n}{A_{n+1} - A_0}\right) = \frac{z_n - z_{n+1}}{0 - z_{n+1}} = \frac{\left(\frac{3}{4} + i\frac{\sqrt{3}}{4}\right) z_n - z_n}{\left(\frac{3}{4} + i\frac{\sqrt{3}}{4}\right) z_n}$$

$$= \frac{\left(-\frac{1}{4} + i\frac{\sqrt{3}}{4}\right) z_n}{\left(\frac{3}{4} + i\frac{\sqrt{3}}{4}\right) z_n} = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{3 + i\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} i \in i\mathbb{R}$$

$$\Rightarrow OA_n A_{n+1} \text{ rectangle en } A_{n+1}$$

b) Mq $\forall n \in \mathbb{N} \quad Z_n = r_n e^{i \frac{n\pi}{6}}$

pour $n=0$: $Z_0 = r_0 e^{i0} = 1$ vérifie

Supposons $Z_n = r_n e^{i \frac{n\pi}{6}}$ vrai

Dq $Z_{n+1} = r_{n+1} e^{i \frac{(n+1)\pi}{6}}$

en effet: $Z_{n+1} = \left(\frac{3}{4} + i\frac{\sqrt{3}}{4}\right) Z_n$

$$\Rightarrow Z_{n+1} = \frac{\sqrt{3}}{2} e^{i \frac{\pi}{6}} \cdot r_n e^{i \frac{n\pi}{6}}$$

$$= \left(\frac{\sqrt{3}}{2} r_n\right) \cdot e^{i \left(\frac{\pi}{6} + \frac{n\pi}{6}\right)}$$

$$= \left(\frac{\sqrt{3}}{2} r_n\right) \cdot e^{i \frac{(n+1)\pi}{6}}$$

$\Rightarrow Z_{n+1} = r_{n+1} e^{i \frac{(n+1)\pi}{6}}$

On a: $\forall n \in \mathbb{N} \quad Z_n = r_n e^{i \frac{n\pi}{6}}$

c) $A_n \in (\vec{O}\vec{V}) \Leftrightarrow (\vec{u}, \vec{OA}_n) = \frac{\pi}{2} + k\pi$

$\Rightarrow \arg(Z_n) = \frac{\pi}{2} + k\pi \Rightarrow \frac{n\pi}{6} = \frac{\pi}{2} + k\pi$

$\Rightarrow n = 3 + 6k$

On a: si $n \equiv 3 \pmod{6} \Rightarrow A_n \in (\vec{O}\vec{V})$

Exercice N° 12: $A(i) \quad B(1+i)$

$M(z) \mapsto M'(z) / z' = \frac{i\bar{z}+1}{\bar{z}+i}$

1) Si $M(z) \in (\vec{O}\vec{u}) \Rightarrow z_M = x = \bar{z}_M$

$\Rightarrow |z'| = \left| \frac{i\bar{x}+1}{x+i} \right| = \frac{|1+i\bar{x}|}{|x+i|} = \frac{\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}}$

$\Rightarrow |z'| = 1 \Rightarrow OM' = 1 \Rightarrow M' \in \mathcal{C}_{(0,1)}$

2) $z = 1+i e^{i\theta} / \theta \in]-\pi, \pi[$

a) Ensemble de points M

on a $z_M = 1+i e^{i\theta} = z_B + e^{i\theta}$

$\Rightarrow z_M - z_B = e^{i\theta} \Rightarrow \begin{cases} BM = 1 \\ (\vec{u}, \vec{BM}) \equiv \theta \pmod{2\pi} \end{cases}$

$\Rightarrow M$ décrit le cercle $\mathcal{C}_{(B,1)}$ privé de $A(i)$ car $\theta \neq \pi$

b) $z' - i = \frac{i\bar{z}+1}{\bar{z}+i} - i = \frac{i\bar{z}+1-i\bar{z}-i}{\bar{z}+i}$

$\Rightarrow z' - i = \frac{2}{\bar{z}+i} = \frac{2}{1+i e^{-i\theta}}$

$\Rightarrow z' - i = \frac{2}{1+e^{-i\theta}} = \frac{2}{2 \cos(\frac{\theta}{2}) e^{i \frac{\theta}{2}}}$

$\Rightarrow z' - i = \frac{1}{\cos(\frac{\theta}{2})} e^{i \frac{\theta}{2}} = \frac{1}{\cos(\frac{\theta}{2})} \left[\cos(\frac{\theta}{2}) + i \sin(\frac{\theta}{2}) \right]$

$\Rightarrow z' - i = 1 + i \tan\left(\frac{\theta}{2}\right)$

c) $\arg(\vec{BM'}) = z_M - z_B = z' - i - 1$

$= 1 + i \tan\frac{\theta}{2} - 1 = i \tan\left(\frac{\theta}{2}\right)$

$\Rightarrow \arg(\vec{BM'}) = \tan\left(\frac{\theta}{2}\right) \cdot \arg(\vec{v})$

$\Rightarrow \boxed{\vec{BM'} = \tan\left(\frac{\theta}{2}\right) \cdot \vec{v}}$

$\vec{BM'}$ col à $\vec{v} \Rightarrow M'$ décrit la droite parallèle à $(\vec{O}\vec{v})$ passant par B d'où M' décrit $\Delta: x=1$

Exercice N° 13: $A(i) \quad B(-i)$

$\mathcal{C} = \mathcal{C}_{(0,1)} \quad M'' = S_{(\vec{O}\vec{u})}(M)$

$f: M(z) \mapsto M'(z') / z' = \frac{z^2+1}{z}$

1) a) $f(A) = A' / z_A' = \frac{z_A^2+1}{z_A} = \frac{i^2+1}{i} = 0 = z_B$

$\Rightarrow \boxed{f(A) = 0}$

$f(B) = B' / z_B' = \frac{z_B^2+1}{z_B} = \frac{(-i)^2+1}{-i} = 0 = z_B$

$\Rightarrow \boxed{f(B) = 0}$

b) $z \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow z = i\alpha$

$\Rightarrow z^2 = \frac{(i\alpha)^2+1}{i\alpha} = \frac{1-\alpha^2}{i\alpha} = i \left(\frac{\alpha^2-1}{\alpha} \right) \in i\mathbb{R}$

$$\text{d'où } z \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow z' \in i\mathbb{R}$$

$$\text{c) soit } M \in (AB) \cap A(i) \cap B(-i) \\ \Rightarrow (AB) = (O\bar{v})$$

$$\text{d'où } M \in (O\bar{v}) \Leftrightarrow z \in i\mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow z' \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow M' \in (O\bar{v}) = (AB)$$

$$\text{Concl: } f(AB) \setminus \{0\} = (AB) \setminus \{0\}$$

$$\Rightarrow (AB) \setminus \{0\} \text{ globalement invariante par } f$$

$$2) \text{ a) si } z = e^{i\theta} \Rightarrow z' = \frac{(e^{i\theta})^2 + 1}{e^{i\theta}}$$

$$\Rightarrow z' = \frac{1 + e^{i2\theta}}{e^{i\theta}} = e + e^{-i\theta} = 2\cos\theta e^{i\theta}$$

$$\bullet \text{ si } M \text{ décrit } \mathbb{E}(0,1) \Leftrightarrow z = e^{i\theta}$$

$$\Rightarrow z' = 2\cos\theta \Rightarrow M' \in (O\bar{u})$$

$$\text{et } \theta \in \mathbb{R} \Rightarrow -2 \leq 2\cos\theta \leq 2$$

$$\Rightarrow M' \text{ décrit le segment } [1\bar{7}]/\bar{7}(-2)$$

$$b) z' = 2\cos\theta \Leftrightarrow \frac{z^2 + 1}{z} = 2\cos\theta$$

$$\Leftrightarrow z^2 + 1 = 2\cos\theta z \Leftrightarrow$$

$$z^2 - 2\cos\theta z + 1 = 0$$

$$\Delta' = \cos^2\theta - 1 = -\sin^2\theta = (i\sin\theta)^2$$

$$\Rightarrow z' = \cos\theta + i\sin\theta = e^{i\theta}$$

$$z'' = \cos\theta - i\sin\theta = e^{-i\theta}$$

$$S\mathbb{C} = \{z', z''\}$$

$$3) \text{ a) } z' - z = \frac{z^2 + 1}{z} - z = \frac{z^2 + 1 - z^2}{z}$$

$$\Rightarrow \boxed{z' - z = \frac{1}{z}}$$

$$b) z' - z = \frac{1}{z} \Rightarrow \begin{cases} |z' - z| = \frac{1}{|z|} \\ \arg(z' - z) = -\arg(z) + \pi \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} MM' = \frac{1}{OM} \\ (\vec{u}, \vec{MM'}) \equiv -(\vec{u}, \vec{OM}) \pmod{2\pi} \end{cases}$$

$$\sim M'' = S_{(O\bar{u})}(M) \Rightarrow (\vec{u}, \vec{OM''}) \equiv -(\vec{u}, \vec{OM}) \pmod{2\pi}$$

$$\Rightarrow (\vec{u}, \vec{MM'}) \equiv (\vec{u}, \vec{OM''}) \pmod{2\pi}$$

$$\Leftrightarrow \vec{MM'} \text{ et } \vec{OM''} \text{ et même sens}$$

$$\text{c) si } M \in \mathbb{E} \Rightarrow OM = 1 \text{ d'où } OM'' = 1$$

$$\text{or } MM' = \frac{1}{OM} = 1$$

$$\text{also } MM' = \vec{OM''} \Rightarrow \vec{MM'} \text{ et } \vec{OM''} \text{ et même sens}$$

$$\vec{MM'} = \vec{OM''} \Rightarrow OMM'M'' \neq$$

$$\text{d'autre part: } OM = OM'' = 1$$

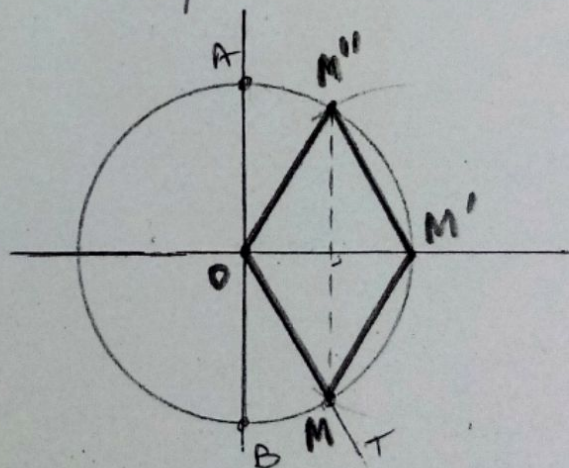
$$\text{Concl: } OMM'M'' \text{ est un losange}$$

$$\text{d) si } z = e^{i\pi/3} \Rightarrow M = \mathbb{E}(0,1) \cap (OT)$$

$$\text{telq: } (\vec{u}, \vec{OT}) \equiv -\pi/3 \pmod{2\pi}$$

$$M'' = S_{(O\bar{u})}(M)$$

$$\text{et } M' \text{ telq: } \vec{MM'} = \vec{OM''}$$



Exercice N° 14: $\theta \in [-\pi, \pi]$

$$f_\theta: M(z) \mapsto M'(z') / z' = iz + \sqrt{2}e^{i\theta}$$

$$1) f_\theta: M \mapsto M' / N \mapsto N' / M \neq N$$

$$\begin{aligned} MM' &= |z_{N'} - z_M| = |(iz_N + \sqrt{2}e^{i\theta}) - (iz_M + \sqrt{2}e^{i\theta})| \\ &= |i(z_N - z_M)| = |i| \cdot |z_N - z_M| = MN \end{aligned}$$

$\Rightarrow f_\theta$ est une isométrie plane

2) $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$

ou $z' = i\bar{z} + \sqrt{2}e^{i\theta}$

$\Rightarrow x' + iy' = i(x - iy) + \sqrt{2}(\cos\theta + i\sin\theta)$

$\Rightarrow x' + iy' = ix + y + \sqrt{2}\cos\theta + i\sqrt{2}\sin\theta$

par identité: $\begin{cases} x' = y + \sqrt{2}\cos\theta \\ y' = x + \sqrt{2}\sin\theta \end{cases}$

3) $I_\theta = \{M \in \mathbb{P} / f_\theta(M) = M\}$

a) $f_\theta(M) = M \Rightarrow z' = z \Rightarrow \begin{cases} x' = x \\ y' = y \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} x = y + \sqrt{2}\cos\theta & (1) \\ y = x + \sqrt{2}\sin\theta & (2) \end{cases}$

(1) + (2): $\sqrt{2}(\cos\theta + \sin\theta) = 0$

$\Rightarrow \cos\theta + \sin\theta = 0$

d'où si $\cos\theta + \sin\theta \neq 0 \Rightarrow I_\theta = \emptyset$

b) si $\theta = -\frac{\pi}{4} \Rightarrow \cos\theta + \sin\theta = 0$

$\Rightarrow I_{-\frac{\pi}{4}}: \Delta_1: y = x + \sqrt{2}\sin(-\frac{\pi}{4})$

$\Rightarrow I_{-\frac{\pi}{4}}: \Delta_1: \boxed{y = x - 1}$

si $\theta = \frac{3\pi}{4} \Rightarrow \cos\theta + \sin\theta = 0$

$\Rightarrow I_{\frac{3\pi}{4}}: \Delta_2: y = x + \sqrt{2}\sin(\frac{3\pi}{4})$

$\Rightarrow I_{\frac{3\pi}{4}}: \Delta_2: \boxed{y = x + 1}$

c) si $\theta = -\frac{\pi}{4} \Rightarrow f_{-\frac{\pi}{4}}$ isométrie qui

fixe $\Delta_1: y = x - 1$

$\Rightarrow \boxed{f_{-\frac{\pi}{4}} = S_{\Delta_1}}$

si $\theta = \frac{3\pi}{4} \Rightarrow f_{\frac{3\pi}{4}}$ isométrie qui

fixe $\Delta_2: y = x + 1$

$\Rightarrow \boxed{f_{\frac{3\pi}{4}} = S_{\Delta_2}}$

4) $\theta \in [-\pi, \pi[\setminus \{-\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\}$

a) $\cos\theta + \sin\theta \neq 0 \Rightarrow I_\theta = \emptyset$

d'où f_θ n'admet pas de pts invariants

b) $f_\theta(0) = 0' / z_0' = \sqrt{2}e^{i\theta}$

$f_\theta(1) = 1' / z_1' = i\bar{z} + \sqrt{2}e^{i\theta}$

$\Rightarrow z_1' = i + \sqrt{2}e^{i\theta}$

c) f_θ isométrie n'ayant pas de pt invariant

$\Rightarrow \begin{cases} f_\theta = \text{t.w.} \\ \text{ou} \\ f_\theta = \text{symétrie glissante} \end{cases}$

or $f_\theta: 0 \rightarrow 0'(\sqrt{2}e^{i\theta})$

$1 \rightarrow 1'(i + \sqrt{2}e^{i\theta})$

$\text{aff}(\vec{0'1'}) = z_1' - z_0' = i \Rightarrow \vec{0'1'} \neq \vec{01}$

$\text{aff}(\vec{01}) = z_1 - z_0 = 1$

$\Rightarrow f_\theta \neq \text{t.w.}$

Concl.: f_θ est une symétrie glissante

Exercice N° 15: $E(1+i)$ $F(\frac{1-i}{2})$

1) $z_E = 1+i = \sqrt{2}(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}) = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$

$z_F = \frac{1-i}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$

2) $M(z = e^{i2\theta}) \Rightarrow OM = |e^{i2\theta}| = 1$

$\Rightarrow M \in \mathcal{C}(0, 1)$

3) $EM \cdot FM = |z_M - z_E| \cdot |z_M - z_F|$
 $= |(e^{i2\theta} - \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}})(e^{i2\theta} - \frac{\sqrt{2}}{2}e^{-i\frac{\pi}{4}})|$

$= |e^{i4\theta} - (\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} + \frac{\sqrt{2}}{2}e^{-i\frac{\pi}{4}})e^{i2\theta} + 1|$

$= |e^{i4\theta} + 1 - (1+i + \frac{1-i}{2})e^{i2\theta}|$

$$\Rightarrow EM, FM = |e^{i4\theta} + 1 - e^{i2\theta}(\frac{3}{2} + \frac{1}{2}i)|$$

$$4) a) e^{i4\theta} + 1 = e^{i2\theta}(e^{i2\theta} + e^{-i2\theta}) \\ = 2\cos(2\theta) e^{i2\theta}$$

$$b) EM, FM = |e^{i4\theta} + 1 - e^{i2\theta}(\frac{3}{2} + \frac{1}{2}i)| \\ = |2\cos(2\theta) e^{i2\theta} - e^{i2\theta}(\frac{3}{2} + \frac{1}{2}i)| \\ = |e^{i2\theta} (2\cos(2\theta) - \frac{3}{2} - \frac{1}{2}i)|$$

$$EM, FM = \sqrt{(2\cos(2\theta) - \frac{3}{2})^2 + \frac{1}{4}}$$

$$5) a) -1 \leq \cos(2\theta) \leq 1$$

$$-\frac{7}{2} \leq 2\cos(2\theta) - \frac{3}{2} \leq \frac{1}{2} \leq \frac{7}{2}$$

$$\Rightarrow 0 \leq (2\cos(2\theta) - \frac{3}{2})^2 \leq \frac{49}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{4} \leq (2\cos(2\theta) - \frac{3}{2})^2 + \frac{1}{4} \leq \frac{25}{2}$$

$$b) EM, FM \text{ maximale} \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{4} + (2\cos(2\theta) - \frac{3}{2})^2 = \frac{25}{2} \Leftrightarrow$$

$$(2\cos(2\theta) - \frac{3}{2})^2 = \frac{49}{4} \Rightarrow |2\cos(2\theta) - \frac{3}{2}| = \frac{7}{2}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2\cos(2\theta) - \frac{3}{2} = \frac{7}{2} \\ 2\cos(2\theta) - \frac{3}{2} = -\frac{7}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2\cos(2\theta) = 5 \\ \text{ou} \\ 2\cos(2\theta) = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos(2\theta) = \frac{5}{2} \text{ Absolu} \\ \cos(2\theta) = -1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 2\theta = \pi + 2k\pi \Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{2} + k\pi$$

$$\text{or } \theta \in \dots \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow z_0 = e^{i\pi} = -1$$

$$\text{also } M_0(e^{i\pi} = -1)$$

Exercice N° 16:

$$m \in \mathbb{C}^* / |m| = r \quad \text{arg}(m) = \frac{\pi}{6} + 2\pi k$$

$$M(m) \text{ et } A(1)$$

$$1) \frac{\sqrt{3}+i}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i = e^{i\frac{\pi}{6}}$$

$$2) AM = |z_m - z_A| = |m - 1|$$

$$AM = 1 \Leftrightarrow AM^2 = 1 \Leftrightarrow$$

$$|m-1|^2 = 1 \Leftrightarrow (m-1)(\bar{m}-1) = 1$$

$$\Leftrightarrow m\bar{m} - (m+\bar{m}) + 1 = 1$$

$$\text{or } m\bar{m} = |m|^2 = r^2$$

$$m+\bar{m} = r\cos(\frac{\pi}{6}) = r\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow r^2 - r\frac{\sqrt{3}}{2} = 0 \Leftrightarrow r(r - \frac{\sqrt{3}}{2}) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} r=0 : \text{Absolu} \\ r - \frac{\sqrt{3}}{2} = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{r = \frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$3) (E_m): m^2 - (1+i)z + \frac{\sqrt{3}+i}{2\bar{m}} = 0$$

$$a) S = z_1 + z_2 = -\frac{b}{a} = \frac{1+i}{m}$$

$$\Rightarrow \arg(S) = \arg(z_1 + z_2) = \arg(\frac{1+i}{m}) + 2\pi k$$

$$\Rightarrow \arg(z_1 + z_2) = \arg(1+i) - \arg(m) + 2\pi k$$

$$= \arg(\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}) - \frac{\pi}{6} + 2\pi k$$

$$= \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6} + 2\pi k$$

$$\Rightarrow \boxed{\arg(z_1 + z_2) = \frac{\pi}{12} + 2\pi k}$$

$$b) |m(\frac{\sqrt{3}+i}{2\bar{m}})| = \frac{m}{\bar{m}} (\frac{\sqrt{3}+i}{2})$$

$$= \frac{r e^{i\frac{\pi}{6}}}{r e^{-i\frac{\pi}{6}}} e^{i\frac{\pi}{6}} = e^{i\frac{\pi}{3}} = i$$

$$\text{concl: } \boxed{m(\frac{\sqrt{3}+i}{2\bar{m}}) = i}$$

$$c) \Delta = (1+i)^2 - 4m \left(\frac{\sqrt{3}+i}{2\bar{m}} \right) \\ = 2i - 4i = -2i = (1-i)^2$$

$$z_1 = \frac{1+i+1-i}{2m} = \frac{1}{m} \left\{ \begin{array}{l} \text{So } = \{z_1, z_2\} \\ z_2 = \frac{1+i-1-i}{2m} = \frac{i}{m} \end{array} \right.$$

$$d) m = r e^{i\frac{\pi}{6}} \Rightarrow z_1 = \frac{1}{m} = \frac{1}{r} e^{-i\frac{\pi}{6}} \\ \text{et } z_2 = \frac{i}{m} = \frac{e^{i\frac{\pi}{2}}}{r e^{i\frac{\pi}{6}}} = \frac{1}{r} e^{i\frac{\pi}{3}}$$

$$4) OM_1 = |z_1| = \frac{1}{r} \left\{ \begin{array}{l} \Rightarrow OM_1 = OM_2 \\ OM_2 = |z_2| = \frac{1}{r} \end{array} \right.$$

$$\text{or } \frac{\arg(\overrightarrow{OM_2})}{\arg(\overrightarrow{OM_1})} = \frac{\frac{\pi}{3}}{\frac{\pi}{6}} = 2 \Rightarrow i \in i\mathbb{R} \\ \Rightarrow \overrightarrow{OM_1} \perp \overrightarrow{OM_2}$$

Concl: OM_1, OM_2 rectangle et isocèle

$$5) M \in \mathcal{C}_{(0,1)} \Rightarrow r=1 \\ \text{d'où } m = e^{i\frac{\pi}{6}}$$

$$a) \frac{i-z}{1+z} = e^{i\theta} \Rightarrow i-z = e^{i\theta} + e^{i\theta} z$$

$$\Rightarrow (1+e^{i\theta})z = -i(e^{i\theta}-1)$$

$$\Rightarrow z = -i \frac{(e^{i\theta}-1)}{(e^{i\theta}+1)} \cdot \frac{e^{-i\frac{\theta}{2}}}{e^{-i\frac{\theta}{2}}}$$

$$\Rightarrow z = -i \left[\frac{e^{i\frac{\theta}{2}} - e^{-i\frac{\theta}{2}}}{e^{i\frac{\theta}{2}} + e^{-i\frac{\theta}{2}}} \right]$$

$$\Rightarrow z = -i \left[\frac{2i \sin \frac{\theta}{2}}{2 \cos \frac{\theta}{2}} \right] = \tan \left(\frac{\theta}{2} \right)$$

$$b) (E_m): m \left(\frac{i-z}{1+z} \right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}+i}{2\bar{m}} \right) \left(\frac{i+z}{1-z} \right)^2 = 1+i$$

$$\text{m pos } \frac{i-z}{1+z} = e^{i\alpha} \Rightarrow$$

$$\left[m e^{i2\alpha} + \frac{\sqrt{3}+i}{2\bar{m}} e^{-i2\alpha} = 1+i \right] e^{i2\alpha}$$

$$\Rightarrow m e^{i4\alpha} + \frac{\sqrt{3}+i}{2\bar{m}} = (1+i) e^{i2\alpha}$$

$$\Rightarrow m (e^{i2\alpha})^2 - (1+i) e^{i2\alpha} + \frac{\sqrt{3}+i}{2\bar{m}} = 0$$

$$\Rightarrow e^{i2\alpha} = \frac{1}{m} = \frac{1}{r} e^{-i\frac{\pi}{6}} = e^{-i\frac{\pi}{6}}$$

$$\text{ou } e^{i2\alpha} = \frac{i}{m} = e^{i\frac{\pi}{3}}$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 2\alpha = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \\ \text{ou } 2\alpha = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \alpha = -\frac{\pi}{12} + k\pi \\ \alpha = \frac{\pi}{6} + k\pi \end{array} \right.$$

$$\bullet \text{ Si } \alpha = -\frac{\pi}{12} + k\pi \Rightarrow z = \tan \left(-\frac{\pi}{24} + \frac{k\pi}{2} \right)$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} z_1 = \tan \left(-\frac{\pi}{24} \right) \\ z_2 = \tan \left(-\frac{\pi}{24} + \frac{\pi}{2} \right) = \tan \left(\frac{11\pi}{24} \right) \end{array} \right.$$

$$\bullet \text{ Si } \alpha = \frac{\pi}{6} + k\pi \Rightarrow z = \tan \left(\frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2} \right)$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} z_3 = \tan \left(\frac{\pi}{12} \right) \\ z_4 = \tan \left(\frac{7\pi}{12} \right) \end{array} \right.$$

$$S = \{z_1, z_2, z_3, z_4\}$$

Exercice N° 17:

$$\textcircled{I} (E): z^2 - 2e^{i\theta} z + 1 = 0 \quad / \theta \in]0, \pi[$$

$$1) \Delta = (e^{i\theta})^2 - 1 = e^{i2\theta} - 1 \neq 0$$

$$\text{Car } \theta \in]0, \pi[$$

$\Rightarrow (E)$: admet 2 racines distinctes

$$2) \text{ Soit } S = z_1 + z_2 = \frac{-b}{a} = 2e^{i\theta} \notin \mathbb{R}$$

$\Rightarrow z_1, z_2$ ne sont pas réels

$$\textcircled{\text{II}} \quad A(1) \quad B(-1) \quad M_1(z_1) \quad M_2(z_2)$$

$$K = M_1 * M_2 \quad \text{et} \quad E = E_{(K,1)}$$

$$1) \quad z_K = \frac{z_1 + z_2}{2} = \frac{2e^{i0}}{2} = e^{i0}$$

$$\Rightarrow OK = |z_K| = |e^{i0}| = 1$$

$$\Rightarrow \boxed{K \in E(0,1)}$$

$$2) \quad a) \quad (z_2 - z_1)^2 = z_2^2 + z_1^2 - 2z_1 z_2$$

$$= z_2^2 + z_1^2 + 2z_1 z_2 - 4z_1 z_2$$

$$= (z_1 + z_2)^2 - 4P = (2z_K)^2 - 4P$$

$$\text{or } P = \frac{c}{a} = 1$$

$$\Rightarrow (z_2 - z_1)^2 = 4(z_K^2 - 1)$$

$$b) \quad (z_2 - z_1)^2 = 4(z_K - 1)(z_K + 1)$$

$$\Rightarrow 2 \arg(z_2 - z_1) = \arg(z_K - 1) + \arg(z_K + 1) \pmod{2\pi}$$

$$\Rightarrow 2 \arg(z_2 - z_1) = \arg(z_K - 1) + \arg(z_K + 1) \pmod{2\pi}$$

$$\Rightarrow 2(\vec{u}, \vec{M_1 M_2}) = (\vec{u}, \vec{AK}) + (\vec{u}, \vec{BK}) \pmod{2\pi}$$

$$\Rightarrow (\vec{AK}, \vec{u}) + (\vec{u}, \vec{M_1 M_2}) = (\vec{M_1 M_2}, \vec{u}) + (\vec{u}, \vec{BK}) \pmod{2\pi}$$

$$\Rightarrow (\vec{AK}, \vec{M_1 M_2}) = (\vec{M_1 M_2}, \vec{BK}) \pmod{2\pi}$$

$$\Rightarrow (\vec{KA}, \vec{M_1 M_2}) = (\vec{M_1 M_2}, \vec{KB}) \pmod{2\pi}$$

c) (M_1, M_2) : bissectrice interne du secteur $(\vec{KA}, \vec{KB})$

$$\Rightarrow (M_1, M_2) = D : \text{bissectrice int}(\vec{KA}, \vec{KB})$$

$$\text{et } K = M_1 * M_2$$

$$3) \quad a) \quad \frac{z_2 + 1}{z_2 - 1} = \frac{\frac{1}{z_1} + 1}{\frac{1}{z_1} - 1} = \frac{1 + z_1}{1 - z_1} = -\frac{z_1 + 1}{z_1 - 1}$$

$$b) \quad \arg\left(\frac{z_2 + 1}{z_2 - 1}\right) \equiv \pi + \arg\left(\frac{z_1 + 1}{z_1 - 1}\right) \pmod{2\pi}$$

$$\Rightarrow \arg\left(\frac{z_2 - z_1}{z_2 - z_A}\right) \equiv \pi + \arg\left(\frac{z_1 - z_1}{z_1 - z_A}\right) \pmod{2\pi}$$

$$\Rightarrow (\vec{M_2 A}, \vec{M_2 B}) = (\vec{M_1 A}, \vec{M_1 B}) + \pi \pmod{2\pi}$$

$\Rightarrow M_2, A, B, M_1$: sont cocycliques

c) on pose Ω : le centre des cercles passant par A, B, M_1, M_2

$$\Rightarrow \Omega A = \Omega B \Rightarrow \Omega \in \text{med}(AB) = (O\vec{V})$$

$$\text{et } \Omega M_1 = \Omega M_2 \Rightarrow \Omega \in \text{med}(M_1, M_2)$$

$D' = \text{med}(M_1, M_2)$ = la La' Δ passant par K

$$\Rightarrow \Omega = D' \cap (O\vec{V})$$

$$\Rightarrow \text{le cercle } E = E(\Omega, \Omega A)$$

$$E \cap D = \{M_1, M_2\}$$

